

## UČNI NAČRT PREDMETA/COURSE SYLLABUS

**Predmet:** Analiza in navadne diferencialne enačbe  
**Course title:** Calculus and ordinary differential equations

Študijski programi in stopnja	Študijska smer	Letnik	Semestri
Strojništvo - razvojno raziskovalni program, prva stopnja, univerzitetni	Ni členitve (študijski program)	1. letnik	Zimski

**Univerzitetna koda predmeta/University course code:** 2001-U

Predavanja	Seminar	Vaje	Klinične vaje	Druge oblike študija	Samostojno delo	ECTS
75		60			90	9

**Nosilec predmeta/Lecturer:** Aljoša Peperko, Janez Žerovnik

**Vrsta predmeta/Course type:** Obvezni splošni predmet /Compulsory general course

**Jeziki/Languages:**

Predavanja/Lectures:	Slovenščina
Vaje/Tutorial:	Slovenščina

**Pogoji za vključitev v delo oz. za opravljanje študijskih obveznosti:** **Prerequisites:**

Izpolnjevanje pogojev za vpis v Univerzitetni študijski program I. stopnje Strojništvo - Razvojno raziskovalni program.

Meeting the enrollment conditions for the Academic study programme of Mechanical Engineering - Research and Development program.

**Vsebina:**

Uvod in osnovni pojmi  
1. Matematika in matematično modeliranje.  
- Korektnost in ustreznost modela. Množice in števila. Kompleksna števila. Polarni zapis kompleksnega števila. Zaporedja in limita za poredja. Številске vrste (realne in kompleksne). Konvergenčni kriteriji (primerjalni, kvocientni, korenski).  
Realne funkcije realne spremenljivke in odvod  
2. Realne funkcije.  
- Elementarne funkcije. Limita funkcije. Zvezne funkcije. Osnovne lastnosti zveznih funkcij. Definicija in geometrijski pomen odvoda. Diferencial. Pravila za odvajanje. Odvodi elementarnih funkcij.  
3. Izreki o odvedljivih funkcijah.  
- Rolleov, Lagrangeov in Cauchyjev izrek. L'Hopitalovo pravilo. Odvodi višjega reda. Taylorjeva formula. Taylorjeva vrsta analitične funkcije. Definicija pomembnih kompleksnih funkcij s pomočjo Taylorjevih vrst. Eulerjeva formula.  
4. Lokalni ekstremi realne funkcije.  
- Stacionarne točke odvedljive funkcije. Analiza lastnosti funkcij s pomočjo prvega in drugega odvoda. Risanje grafov funkcij. Uporaba odvoda.

**Content (Syllabus outline):**

Introduction and basics  
1. Mathematics and mathematical modelling.  
- Correctness and suitability of the model. Sets and numbers. Complex numbers. Polar form of a complex number. Sequences and a limit of a sequence. Number series (real and complex). Convergence tests (comparison, ratio, root).  
Real functions of real variables  
2. Real functions.  
- Elementary functions. Limit of a function. Continuous functions. Basic properties of continuous functions. Definition of derivative and its geometrical meaning. Differential. Rules for derivation. Derivates of elementary functions.  
3. Theorems for differential functions.  
- Rolle, Lagrange and Cauchy. L'Hopital rule. Derivates of higher order. Taylor formula. Taylor series of a analytic functions. Definition of important complex functions with Taylor series. Euler formula.  
4. Local extrema of a real function.  
- Stationary points of differentiable functions. Property analysis of functions via the first and second and derivates. Drawing of graphs of functions. Applications

<p>Nedoločeni in določeni integral</p> <p>5. Definicija določenega in nedoločenega integrala. - Lastnosti integrala. Osnovni izrek analize. Nedoločeni integrali nekaterih elementarnih funkcij.</p> <p>6. Osnovne metode integriranja. - Vpeljava nove spremenljivke in integracija po delih. Posplošeni integral. Uporaba integrala: prostornine, ploščine izsekov (navor), težišča, itd.</p> <p>Realne funkcije dveh ali več realnih spremenljivk</p> <p>7. Definicija realne funkcije več spremenljivk. - Geometrijski in fizikalni primeri. Limita in zveznost. Parcialni odvodi. Gradient. Totalni diferencial. Tangentna ravnina.</p> <p>8. Višji parcialni odvodi. - Definicija in osnovne lastnosti. Definicija odvoda v poljubni smeri. Smerni odvod in gradient. Formula za odvajanje sestavljenih funkcij (verižno pravilo).</p> <p>9. Definicija lokalnega in globalnega ekstrema. - Klasifikacija lokalnih ekstremov za gladke funkcije več spremenljivk. Veza ni ekstremi, Lagrangeova metoda.</p> <p>10. Izrek o implicitni funkciji. - Taylorjeva formula in Taylorjeva vrsta za funkcije več spremenljivk. Primeri uporabe za modeliranje nelinearnih problemov.</p> <p>Navadne diferencialne enačbe</p> <p>11. Osnovni pojmi. - Modeliranje z diferencialnimi enačbami. Primeri navadnih diferencialnih enačb. Cauchyjeva naloga. Grafična metoda. Enačba z ločljivima spremenljivkama. Metoda integrirajočih množiteljev.</p> <p>12. Linearne diferencialne enačbe 1. reda. - Homogene in nehomogene enačbe. Splošna metoda za reševanje linearne enačbe prvega reda. Bernoullijeva enačba. Aplikacije. Populacijska dinamika.</p> <p>13. Homogene linearne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti. - Karakteristična kvadratna enačba. Nehomogene linearne enačbe drugega reda. Primeri iz fizike in tehnike. Masno-vzmetni sistemi. Vsiljene oscilacije. Resonanca.</p> <p>14. Metode za reševanje nehomogenih linearnih diferencialnih enačb drugega reda. - Variacija konstant, metoda nedoločenih koeficientov. Euler-Cauchyjeve enačbe.</p> <p>15. Linearne diferencialne enačbe višjega reda. - Metode za zniževanje reda diferencialne enačbe. Linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti. Reševanje posebnih homogenih enačb poljubnega reda.</p> <p>Opomba. Snov 9 in 10 tedna se lahko predava na koncu semestra, če se pokaže potreba po zgodnejši obravnavi diferencialnih enačb zaradi sinhronizacije z drugimi predmeti.</p>	<p>of a derivate.</p> <p>Indefinite and definite integral</p> <p>5. Definition of definite and indefinite integral. - Properties of integral. Fundamental theorem of analysis. Indefinite integrals of elementary functions.</p> <p>6. Basic methods of integration. - Substitution and per partes integration. Improper integral. Applications of integral: volumes, plates, torque, center of gravity</p> <p>Real functions several real variables</p> <p>7. Definition of a real function of several variables. - Geometrical and physical examples. Limit and continuity. Partial derivatives. Gradient. Total differential. Tangent plane.</p> <p>8. Higher order partial derivatives. - Definition and basic properties. Definition of a derivate in arbitrary direction. Directional derivate and gradient. Chain rule.</p> <p>9. Definition of local and global extrema. - Classification of local extrema for smooth functions of several variables. Extrema under additional conditions, Lagrange method.</p> <p>10. Implicit function theorem. - Taylor formula and Taylor series for functions of several variables. Examples of application for modelling of nonlinear problems.</p> <p>Ordinary differential equations.</p> <p>11. Basics. - Modelling with differential equations. Examples of ordinary differential equations. Cauchy task. Graphical method. Separable ordinary differential equations. Integrating factors.</p> <p>12. Linear differential equations of first order. - Homogeneous and nonhomogeneous equations. General method for solving a linear differential equation of first order. Bernoulli equation. Applications. Population dynamics.</p> <p>13. Homeogenous linear differential equations of second order with constant coefficients. - Characteristic square equation. Nonhomeogenous linear differential equations of second order. Examples from physics and engineering. Mass-spring systems. Forced oscillations. Resonance.</p> <p>14. Methods for solving nonhomeogenous linear differential equations of second order. - Variation of constants, unknown constants method. Euler-Cauchy equations.</p> <p>15. Linear differential equations of arbitrary finite order. - Linear differential equations with constant coefficients. Solving special homogeneous linear equations of arbitrary order.</p> <p>Remark. The material of week 9 and 10 can be moved to the end of the course if DE are needed earlier to be synchronized with other subjects of the program.</p>
---	---

**Temeljna literatura in viri/Readings:**

1. ŽEROVNIK, Janez. Matematika Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2014.
2. ŽEROVNIK, Janez. Matematika Popravljen in dopolnjen 1. izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2017.

3. E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, Wiley, 9th Edition, 2006
4. NOVAK, Tina, PEPPERKO, Aljoša, RUPNIK POKLUKAR, Darja, ZAKRAJŠEK, Helena. *Matematika 1 : naloge in postopki reševanja*. 2. dopolnjena izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2018.
5. NOVAK, Tina, PEPPERKO, Aljoša, RUPNIK POKLUKAR, Darja, ZAKRAJŠEK, Helena. *Matematika 2 : naloge in postopki reševanja*. 1. popravljena izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2017.
6. PEPPERKO, Aljoša, PERMAN, Mihael, RUPNIK POKLUKAR, Darja. *Matematika 3 : naloge in postopki reševanja*. 1. izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2017. 184 str.
7. ŽEROVNIK, Janez, BANIČ, Iztok, HRASTNIK LADINEK, Irena, ŠPACAPAN, Simon. *Zbirka rešenih nalog iz tehniške matematike*. 4. izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2011
8. MIZORI-OBLAK, Pavlina. *Matematika za študente tehnike in naravoslovja : prvi del*. Ponatis 6. izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2009.

#### Cilji in kompetence:

##### Cilji:

1. Študenti spoznajo osnovno teoretično podlago iz področij analize in navadnih diferencialnih enačb.
2. Spoznajo teoretične osnove metod za reševanje in izpeljavo rešitev nekaterih fizikalnih in tehniških problemov

##### Kompetence:

1. Sposobnost uporabe pridobljenih matematičnih znanj s področij analize in navadnih diferencialnih enačb za modeliranje, reševanje in evalviranje strokovnih tehniških problemov v strojništvu (S1-RRP, S6-RRP, P4-RRP)
2. Sposobnost samostojnega pridobivanja ustreznega matematičnega znanja za namen reševanja strokovnih inženirskih problemov (P5-RR5, S1-RRP, S2-RRP, S6-RRP, P4-RRP).

#### Objectives and competences:

##### Objectives:

1. Students learn theoretical basis from the fields of calculus and ordinary differential equations.
2. Students learn theoretical foundations of methods to solve some physical and engineering problems.

##### Competences:

1. The ability to apply the obtained mathematical knowledge of calculus and ordinary differential equations for modelling, solving and analysis professional technical problems from mechanical engineering (S1-RRP, S6-RRP, P4-RRP)
2. The ability to acquire new adequate mathematical knowledge for solving professional engineering problems (P5-RR5, S1-RRP, S2-RRP, S6-RRP, P4-RRP).

#### Predvideni študijski rezultati:

##### Znanja:

- Obvladajo metode osnovne analize in navadnih diferencialnih enačb (Z1).
- Razumejo matematične modele nekaterih fizikalnih in tehniških problemov (Z1).

##### Spretnosti:

- Spretnost samostojnega matematičnega eksaktnega modeliranja primerno za htevnih strokovnih problemov (S1.2, S1.3, S1.4).
- Trdna analitična spretnost razmišljanja in analitično-sintetičnega reševanja eksaktnih problemov (S1.2, S1.3, S1.4).

#### Intended learning outcomes:

##### Knowledge:

- Mastering the methods of basic calculus and ordinary differential equations (Z1).
- Understanding mathematical models of some physical and technical problems (Z1).

##### Skills:

- The skill of independent mathematical exact modelling of suitably demanding professional problems (S1.2, S1.3, S1.4).
- Solid analytic skill of thinking and analytic-synthetic solving of exact problems (S1.2, S1.3, S1.4).

#### Metode poučevanja in učenja:

P1 Avdiorna predavanja z reševanjem izbranih - za področje značilnih - teoretičnih in praktično uporabnih primerov.

P2 Obravnava snovi po urejeni in vnaprej razloženi sistematiki.

P3 Avdiatorne vaje, kjer se teoretično znanje s predavanj podkrepí z računskimi primeri.

P12 Individualizirane domače naloge v spletni učilnici

#### Learning and teaching methods:

P1 Auditorial lectures with solving selected field-specific theoretical and applied problems.

P2 Presenting the content according to the explained system.

P3 Auditorial exercises, in which theoretical content from the lectures is supplemented with practical examples.

P12 Individualised homeworks in a web classroom.

#### Načini ocenjevanja:

#### Delež/Weight Assessment:

Pisni izpit.	50,00 %	Written exam.
Teoretični izpit.	50,00 %	Theoretical exam.

#### Reference nosilca/Lecturer's references:

Janez Žerovnik:

1. RUPNIK POKLUKAR, Darja, **ŽEROVNIK, Janez**. Networks with extremal closeness. *Fundamenta informaticae*. 2019, vol. 167, no. 3, str. 219-234, ilustr. ISSN 0169-2968.]
2. DENG, Fei, JIANG, Huiqin, LIU, Jia-Bao, RUPNIK POKLUKAR, Darja, SHAO, Zehui, WU, Pu, **ŽEROVNIK, Janez**. The Sanskruti index of trees and unicyclic graphs. *Open chemistry*. Jan. 2019, vol. 17, iss. 1, f. 448-455, ilustr. ISSN 2391-5420.
3. KALJUN, David, **ŽEROVNIK, Janez**. Improving approximation by switching between two error functions. *Croatian operational research review : CRORR*. [Tiskana izd.]. 2017, vol. 8, nr. 1, str. 107-118, ilustr. ISSN 1848-0225.
4. ERVEŠ, Rija, **ŽEROVNIK, Janez**. Mixed connectivity of Cartesian graph products and bundles. *Ars combinatoria*. 2016, vol. 124, str. 49-6 ISSN 0381-7032.
5. ERVEŠ, Rija, **ŽEROVNIK, Janez**. Mixed fault diameter of Cartesian graph bundles II. *Ars mathematica contemporanea*. [Tiskana izd.]. 2015, vol. 8, no. 2, str. 245-258. ISSN 1855-3966.

Aljoša Peperko:

1. KRAMAR FIJAVŽ, Marjeta, **PEPERKO, Aljoša**, SIKOLYA, Eszter. Semi groups of max-plus linear operators. *Semigroup forum*, ISSN 0037-1912, 2017, vol. 94, iss. 2, str. 463-476.
2. KANDIĆ, Marko, **PEPERKO, Aljoša**. On the submultiplicativity and subadditivity of the spectral and essential spectral radius. *Banach journal of mathematical analysis : an international electronic journal*, ISSN 1735-8787. [Online ed.], 2016, vol. 10, 133-146.
3. **PEPERKO, Aljoša**. On the continuity of the generalized spectral radius in max algebra. *Linear Algebra and its Applications*, ISSN 0024-3795. [Print ed.], 2011, vol. 435, iss. 4, str. 902-907.
4. GABROVŠEK, Boštjan, **PEPERKO, Aljoša**. Hitro množenje velikih števil. *Prespek: list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje*, ISSN 0351-6652, 2016/2017, letn. 44, št. 1, str. 14-15, ilustr. [COBISS.SI-ID [17752409](#)]
5. NOVAK, Tina, **PEPERKO, Aljoša**, RUPNIK POKLUKAR, Darja, ZAKRAJŠEK, Helena. *Matematika 1 : naloge in postopki reševanja*. 2. dopolnjena izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2018. 215 str., ilustr. ISBN 978-961-6980-00-5. [COBISS.SI-ID [297341184](#)]