Izpit iz Matematike 3

Fakulteta za strojništvo

5. junij 2015

Ime in priimek:______________________ Vpisna številka:________________

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	**Točke**
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. **(a)** (16) Poiščite takšno realno število a, da bo $(-\frac{1}{2}, 0)$ stacionarna točka funkcije dveh spremenljivk

$$f(x,y) = x^3y^2 - xy^2 + ax^2 + 4x - 3.$$

V tem primeru poiščite vse stacionarne točke in jih klasificirajte.

(b) (4) Zapišite Taylorjev polinom $T(x,y)$ druge stopnje funkcije $f(x,y)$ razvit okrog točke $(0,-2)$ (pri konkretno izračunanem številu a iz prvega dela naloge).

2. (20) **(a)** Funkcija $f(x,y)$ naj ustreza enačbi

$$(f(x,y))^3 + 3xf(x,y) = 3y\,.$$

Pokažite, da za $x > 0$ velja

$$f_x(x,y) = -\frac{f(x,y)}{(f(x,y))^2 + x} \qquad \text{in} \qquad f_y(x,y) = \frac{1}{(f(x,y))^2 + x}\,.$$

Namig: Enakost, ki ji zadošča funkcija $f(x,y)$, odvajajte parcialno na x oziroma y.

(b) Pokažite, da za $x > 0$ velja

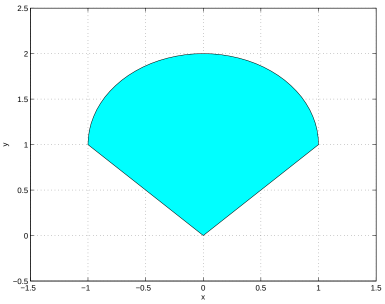
$$f_{xx}(x,y) + x\,f_{yy}(x,y) = 0.$$

Namig: Uporabite prvi del naloge in na primernem mestu upoštevajte, da je $f(x,y)f_y(x,y) = -f_x(x,y)$.

3. (20) Naj bo telo G v prostoru presek krogle s polmerom R in središčem v točki $(0,0,R)$ in stožca z vrhom v izhodišču in osjo enako osi z, s katero plašč stožca oklepa kot $\pi/4$. V matematičnih oznakah je

$$G = \{(x,y,z) \colon x^2 + y^2 + (z-R)^2 = R^2, x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0\}\,.$$

Prerez telesa z xz-ravnino je na spodnji sliki:



(a) Izračunajte prostornino telesa G.

(b) Koordinato z težišča telesa G izračunamo kot

$$T_z = \frac{1}{V} \int_G z\,dx\,dy\,dz\,.$$

Izračunajte T_z.

4. (20) Ploskev $\mathcal{S}$ je podana s parametrizacijo

$$\vec{r}(u,v) = (e^u \cos v, e^u \sin v, u)$$

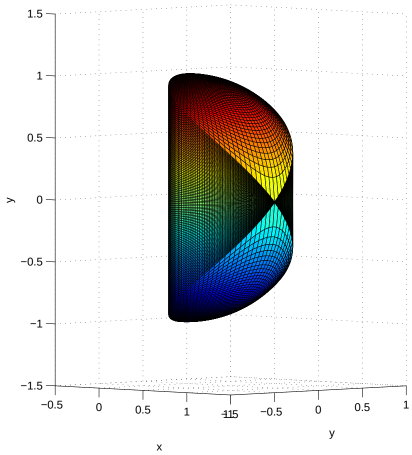
za $u \in [0,1]$ in $v \in [0,\pi/4]$. Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, y, 1)$ skozi ploskev $\mathcal{S}$ (v vsaki točki ploskve izberemo normalo s pozitivno z koordinato).

Pomoč: $\cos^3 v = \cos^2 v \cos v$ in $\sin^2 v = \frac{1}{2}(1-\cos(2v))$.

5. (20) Naj bo G telo, ki nastane kot presek krogle s polmerom $R = 1$ in središčem v izhodišču in neskončnega valja z osjo vzporedno z-osi, ki gre skozi točko $(1/2, 0)$ in ima polmer $R = 1/2$. V matematičnih oznakah je telo

$$G = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}\,.$$

Telo je na spodnji sliki.



S pomočjo cilindričnih koordinat izračunajte, da je prostornina telesa G enaka

$$V = \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}\,.$$

Naj bo $\vec{F} = (-2yz, (2x - 1)z, z)$. S pomočjo Gaussovega izreka izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}$ skozi tisti del površine telesa G, ki sovpada z površino krogle. Za normalo vedno izberite vektor, ki kaže iz telesa. Ploskev je na spodnji sliki.