

Izpit iz Matematike 3

Fakulteta za strojništvo

6. februar 2015

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Funkcija $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ naj bo na $G = \{(x, y): x \neq 0\}$ definirana s predpisom

$$f(x, y) = \phi\left(\frac{y}{x}\right) + x \cdot \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

kjer sta $\phi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljivi funkciji.

(a.) Preverite, da na G velja

$$x^2 f_{xx}(x, y) + 2xy f_{xy}(x, y) + y^2 f_{yy}(x, y) = 0.$$

(b.) Naj bo funkcija $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definirana s predpisom

$$g(v, w) = (e^{v+w}, e^{v-w})$$

in naj bo $\phi(t) = t^{-1}$ in $\psi(t) = t$. Izračunajte gradient sestavljene funkcije

$$F(v, w) = f(g(v, w)).$$

2. (20) Za dane pozitivne konstante a, b, c, d naj bo funkcija $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definirana

$$F(x, y) = c \ln x - d \cdot x + a \ln y - b \cdot y.$$

Za točko $(x_0, y_0) = (x_0, a/b)$ naj velja $F(x_0, y_0) = \alpha$ in $x_0 > c/d$. Pokažite, da v okolici točke y_0 obstaja funkcija $g(y)$, da velja $g(y_0) = x_0$ in $F(g(y), y) = \alpha$. Pokažite, da ima g v točki y_0 lokalni maksimum.

3. (20) Krog G naj bo dan s predpisom

$$G = \{(x, y) : (x - a)^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

za $a > 0$.

(a) Z uvedbo polarnih koordinat izračunajte

$$\int_G x^2 dx dy$$

Kot znano upoštevajte, da je

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^6 \phi d\phi = \frac{5\pi}{16}.$$

(b) Izračunajte integral

$$\int_G \frac{1}{\sqrt{x}} dx dy.$$

4. (20) Skozi kroglo s polmerom R zvrtaemo okroglo luknjo s polmerom $R_1 < R$, tako da gre os luknje skozi središče krogle. Os luknje naj bo v smeri osi z , središče krogle pa v izhodišču koordinatnega sistema. Krogla naj ima masno gostoto $\rho = 1$. Preluknjano kroglo označimo s K_0 .

(a) Izračunajte masni vztrajnostni moment te “preluknjane” krogle, torej

$$\int_{K_0} (x^2 + y^2) dx dy dz .$$

(b) Izračunajte prostornino preluknjane krogle.

5. (20) Ploskev \mathcal{S} naj bo dana parametrično s

$$\vec{r}(u, v) = (-\cos u + \sqrt{3} \sin u + \sqrt{2}v, -\cos u - \sqrt{3} \sin u + \sqrt{2}v, 2 \cos u + \sqrt{2}v)$$

za $0 \leq u \leq 2\pi$ in $0 \leq v \leq a$. Naj bo $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Izračunajte pretok vektorskega polja \vec{F} skozi ploskev \mathcal{S} . Za normalo si izberite vektor $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$.

Namig: Pri izračunu integrala lahko upoštevate, da se členi oblike $\cos u$, $\sin u$ ali $\cos u \sin u$ na $[0, 2\pi]$ integrirajo v 0.