Izpit iz Matematike 3

Fakulteta za strojništvo

6. junij 2014

Ime in priimek:______________________ Vpisna številka:________________

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	**Točke**
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Naj bo f dvakrat zvezno odvedljiva funkcija ene spremenljivke in naj bo

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\left(f(x+2y) + f(x-2y)\right).$$

Izračunajte

$$F_{xx}(x,y) - \frac{1}{4}\, F_{yy}(x,y)\,.$$

Naj bo $(u,v) \mapsto g(u,v)$ takšna parcialno zvezno odvedljiva funkcija, da je

$$g_u(u,v) = w(u) \qquad \text{in} \qquad g_v(u,v) = -w(v)$$

za neko zvezno odvedljivo funkcijo w ene spremenljivke. Naj bo

$$F(x,y) = g(x+3y, x-3y)\,.$$

Izračunajte

$$F_{xx}(x,y) - \frac{1}{9}\, F_{yy}(x,y)\,.$$

2. (20) Kvader vrišemo v elipsoid, tako da so robovi vzporedni koordinatnim osem. Enačba elipsoida je dana z

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,,$$

kjer so a, b, c pozitivna števila. Poiščite dolžine robov, za katere ima vrisani kvader največjo možno prostornino.

Namig: Za oglišče (x, y, z) *(vrisanega kvadra) s pozitivnimi koordinatami, je pripadajoči volumen kvadra enak* $8xyz$*.*

3. (20) Naj bosta $0 < R_1 < R$ dani števili. Kolobar v ravnini definiramo s predpisom $K = \{(x,y) : R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Izračunajte

$$\int_K (x^2 + y^2)\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy\,.$$

Kot znano upoštevajte

$$\int u^3 \sqrt{1-u^2}\, du = -\frac{1}{15}\left(1-u^2\right)^{3/2}\left(3u^2+2\right) + C\,.$$

Izračunajte

$$\int_K \frac{R\, dx\, dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\,.$$

4. (20) Ploskev $\mathcal{S}$ je podana s parametrizacijo

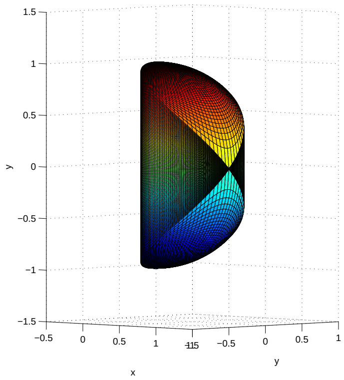
$$\vec{r}(u,v) = (e^u \cos v, e^u \sin v, u)$$

za $u \in [0,1]$ in $v \in [0, \pi/4]$. Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ skozi ploskev $\mathcal{S}$ (v vsaki točki ploskve izberemo normalo s pozitivno z koordinato).

5. (20) Naj bo G telo, ki nastane kot presek krogle s polmerom $R = 1$ in središčem v izhodišču in neskončnega valja z osjo vzporedno z-osi, ki gre skozi točko $(1/2, 0)$ in ima polmer $R = 1/2$. V matematičnih oznakah je telo

$$G = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{1}{4}\}\,.$$

Telo je na spodnji sliki



S pomočjo cilindričnih koordinat izračunajte, da je prostornina telesa G enaka

$$V = \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}\,.$$

Naj bo $\vec{F} = (-2yz, (2x-1)z, z)$. S pomočjo Gaussovega izreka izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}$ skozi tisti del površine telesa G, ki sovpada z površino krogle. Za normalo vedno izberite vektor, ki kaže iz telesa. Ploskev je na spodnji sliki