Izpit iz Matematike 3

Fakulteta za strojništvo

8. september 2017

Ime in priimek:______________________ Vpisna številka:________________

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	**Točke**
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. Dana je funkcija

$$f(x,y) = x^2y^3 - x^2y + ay^2 + 4y - 3.$$

(a) (16) Poiščite takšno realno število a, da bo $(0, -\frac{1}{2})$ stacionarna točka funkcije f. V tem primeru poiščite vse stacionarne točke in jih klasificirajte.

(b) (4) Zapišite Taylorjev polinom $T(x,y)$ druge stopnje funkcije $f(x,y)$ razvit okrog točke $(2,0)$ (pri konkretno izračunanem stevilu a iz prvega dela naloge).

2. (20) Dana je funkcija

$$f(x,y,z) = (x+1)y(z+1)\ln(x^2+z^2) + y^2.$$

Utemeljite, da obstaja taka okolica U točke $(2,0)$ in taka funkcija $h : U \to \mathbb{R}$, da je $h(2,0) = 1$ in $f(h(y,z),y,z) = 4$ za vse $(y,z) \in U$. Izračunajte še $h_z(2,0)$ in $h_{zz}(2,0)$.

3. (20) Naj bo D trikotnik z oglišči $(0,0)$, $(1,1)$ in $(0,1)$. Izračunajte integral

$$\int_D \sqrt{\frac{x}{(1-x)(1-y)}}\,dxdy.$$

Namig: notranja integracija po y.

4. (20) Naj bo K zgornja polovica krogle s središčem $S(R,0,0)$ in polmerom $R>0$, torej

$$K=\{(x,y,z):(x-R)^2+y^2+z^2\leq R^2,\ \ z\geq 0\}.$$

Izračunajte

$$\int_K \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3\,dxdydz.$$

Pomoč: lahko uporabite

$$\int_0^{\pi/2}\cos^6(x)\,dx=\frac{5\pi}{32},\ \ \int_0^{\pi/2}\sin^7(x)\,dx=\frac{16}{35}.$$

5. (20) Dan je valj

$$G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, \quad z \in [1, 2]\}.$$

S $\mathcal{S}$ označimo celotno površino valja G (vključno z osnovnima ploskvama). Izračunajte pretok vektorskega polja

$$\vec{F}(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

skozi $\mathcal{S}$ (normale naj bodo v vsaki točki usmerjene ven iz telesa G).