Izpit iz Matematike 3

Fakulteta za strojništvo

9. februar 2018

Ime in priimek:______________________ Vpisna številka:________________

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	**Točke**
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Funkciji $u(x,y)$ in $v(x,y)$ naj bosta dani z

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\ln\big((1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2\big) \quad \text{in} \quad v(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2xy}{1+x^2-y^2}\right).$$

Pokažite, da je $u_x(x,y) = v_y(x,y)$ in $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$ ter izračunajte

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y).$$

Namig: Premislite ali je res potrebno računati u_{xx} in u_{yy}.

2. **(a)** (8) Izračunajte splošno rešitev naslednje parcialne diferencialne enačbe:

$$f_{yy}(x,y) + 6f_y(x,y) - 7f(x,y) = 0.$$

(b)(12) Naj funkcija $(s,t) \mapsto f(s,t)$ zadošča enačbi $f_{tt}(s,t) = c^2 f_{ss}(s,t)$, kjer je $c > 0$. Za funkcijo

$$F(x,y) = f\left(x, \frac{y}{c}\right)$$

izračunajte $F_{yy}(x,y) - F_{xx}(x,y)$.

3. (20) Območje D naj bo presek kroga z dvema polravninama, natančneje

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0,\ x \geq 1\}.$$

Izračunajte integral

$$\int_D \frac{y^3}{x^2 + y^2}\, dxdy.$$

Namig: $\sin^3 \varphi = (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi$.

4. (20) Naj bo $a > 0$ in $\rho_0 > 0$. Telo G z gostoto $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ leži v zgornjem polprostoru in je omejeno s sfero $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ in ravnino $z = a$. Torej

$$G = \{(x, y, z) : z \geq a,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2\}.$$

Izračunajte vztrajnostni moment telesa G okoli osi z, torej

$$I_z = \int_G \rho(x, y, z)(x^2 + y^2)\, dxdydz.$$

Namig: $\sin^3\theta = (1 - \cos^2\theta)\sin\theta$.

5. (20) Naj bo G telo, ki ga v krogelnih koordinatah opišemo z

$$G = \{(r, \varphi, \theta) \colon R_1 \le r \le R_2, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\}.$$

Izračunajte pretok polja $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (z^2 - zy, zx - z^2, zy - zx)$ skozi površino $\mathcal{S}$ telesa G. Za normalo vzemite vektor, ki kaže iz telesa.

Namig: Gauss.