Izpit iz Matematike 3

Fakulteta za strojništvo

10. februar 2017

Ime in priimek:______________________ Vpisna številka:________________

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, prva je vredna 15 točk, peta 25 točk, ostale pa 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	**Točke**
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (15) Zapišite vse točke, v katerih lahko nastopi vezani ekstrem funkcije $f(x,y) = 4x^2y + 3$ pri pogoju $x^2 + y^2 = 4$.

2. (20) Dana je funkcija

$$f(x,y,z) = (x+1)(y+1)z\ln(x^2+y^2) + e^{z^2}.$$

Utemeljite, da obstaja taka okolica U točke $(2,0)$ in taka funkcija $g : U \to \mathbb{R}$, da je $g(2,0) = 0$ in $f(x,y,g(x,y)) = 1$ za vse $(x,y) \in U$. Izračunajte še $g_y(2,0)$ in $g_{yy}(2,0)$.

3. (20) Izračunajte integral

$$\int_D (y^2 - e^{-2x})\, dxdy,$$

kjer je D trikotnik omejen s premicami $y = 0$, $x = 1$ in $y = x$.

4. (20) Naj bo telo G presek stožca podanega z neenačbo $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$, krogle podane z neenačbo $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ in tretjega oktanta. Natančneje,

$$G = \{(x,y,z) : z \geq \sqrt{x^2+y^2},\;\; x^2+y^2+z^2 \leq 1,\;\; x \leq 0,\;\; y \leq 0\}.$$

Izračunajte

$$\int_G x \; dxdydz.$$

Namig in pomoč: krogelne koordinate in

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))$$

5. Naj bo $R > 0$. Telo G naj bo prisekan valj z osnovno ploskvijo podano z $x^2 + y^2 \leq R^2$, ki je prisekan z ravnino $x + y + z = 4R$. Natančneje,

$$G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2, \ \ 0 \leq z \leq 4R - x - y\}.$$

S $\mathcal{S}$ označimo celotno ploskev, ki obdaja telo G (vključno s spodnjo osnovno in zgornjo prisekano ploskvijo). Dano je vektorsko polje $\vec{F}(x, y, z) = (3x, -y, 2z)$.

(a) (12) Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}$ skozi ploskev $\mathcal{S}$, kjer je normala v vsaki točki ploskve usmerjena navzven.

Namig: Gauss in cilindrične koordinate.

(b) (13) Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}$ skozi tisti del ploskve $\mathcal{S}$, ki sovpada s plaščem valja (normala je v vsaki točki ploskve usmerjena navzven).