

Izpit iz Matematike 3

Fakulteta za strojništvo

15. junij 2018

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vredne so po 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Kvader vrišemo v elipsoid, tako da so robovi vzporedni koordinatnim osem. Enačba elipsoida je dana z

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

kjer so a, b, c pozitivna števila. Poiščite dolžine robov, za katere ima vrisani kvader največjo možno prostornino.

Namig: Za oglišče (x, y, z) (vrisanega kvadra) s pozitivnimi koordinatami, je pripadajoči volumen kvadra enak $8xyz$.

2. (20) Dana je funkcija

$$f(x, y, z) = 2x^2y + z^2e^{yz} + y^2z + 2.$$

Utemeljite, da obstaja taka okolica U točke $(1, 0)$ in taka funkcija $g : U \rightarrow \mathbb{R}$, da je $g(1, 0) = -1$ in $f(x, y, g(x, y)) = 3$ za vse $(x, y) \in U$. Izračunajte še $g_x(1, 0)$, $g_y(1, 0)$ in $g_{xy}(1, 0)$.

3. (20) Krog G naj bo dan s predpisom

$$G = \{(x, y) : (x - a)^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

za $a > 0$.

(a) Z uvedbo polarnih koordinat izračunajte

$$\int_G x^2 dx dy$$

Kot znano upoštevajte, da je

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^6 \phi d\phi = \frac{5\pi}{16}.$$

(b) Izračunajte integral

$$\int_G \frac{1}{\sqrt{x}} dx dy.$$

4. (20) Ploskev \mathcal{S} je pri $u \in [0, 1]$ in $v \in [0, \pi/4]$ podana s parametrizacijo

$$\vec{r}(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v, u)$$

Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}(x, y, z) = (2x, -y, 3z)$ skozi ploskev \mathcal{S} . V vsaki točki ploskve izberemo normalo s pozitivno z koordinato.

5. (20) Naj bo $R > 0$ in naj bo telo G presek krogle podane z $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ in neskončnega stožca podanega z $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$. Torej

$$G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Z \mathcal{S} označimo ploskev, ki obdaja telo G . Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}(x, y, z) = (2x, 3y, xz^2)$ skozi \mathcal{S} . Za normalo vzemite vektor, ki kaže iz telesa.

Namig: Gauss in krogelne koordinate.