Izpit iz Matematike 3

Fakulteta za strojništvo

16. junij 2017

Ime in priimek:______________________ Vpisna številka:________________

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	**Točke**
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. Funkcija $f\colon G \to \mathbb{R}$ naj bo na $G = \{(x,y)\colon x \neq 0\}$ definirana s predpisom

$$f(x,y) = \phi\left(\frac{y}{x}\right) + x \cdot \psi\left(\frac{y}{x}\right)\,,$$

kjer sta $\phi, \psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljivi funkciji.

(a.) (10) Preverite, da na G velja

$$x^2 f_{xx}(x,y) + 2xy f_{xy}(x,y) + y^2 f_{yy}(x,y) = 0\,.$$

(b.) (10) Naj bo funkcija $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definirana s predpisom

$$g(v,w) = (e^{v+w}, e^{v-w})$$

in naj bo $\phi(t) = t^{-1}$ in $\psi(t) = t$. Izračunajte gradient sestavljene funkcije

$$F(v,w) = f(g(v,w)).$$

2. (20) Za dane pozitivne konstante a, b, c, d naj bo funkcija $F\colon (0,\infty)\times(0,\infty) \to \mathbb{R}$ definirana z

$$F(x, y) = c \ln x - d \cdot x + a \ln y - b \cdot y\,.$$

Za točko $(x_0, y_0) = (x_0, a/b)$ naj velja $F(x_0, y_0) = \alpha$ in $x_0 > c/d$. Pokažite, da v okolici točke y_0 obstaja funkcija $g(y)$, da velja $g(y_0) = x_0$ in $F(g(y), y) = \alpha$. Pokažite, da ima g v točki y_0 lokalni maksimum.

3. (20) Naj bo $a > 0$ in naj bo G presek kroga, s polmerom a in središčem $(0, a)$, z desno polravnino. Torej

$$G = \{(x, y) \colon x^2 + (y - a)^2 \leq a^2, \;\; x \geq 0\}.$$

(a) Z uvedbo polarnih koordinat izračunajte

$$\int_G xy \, dx \, dy$$

(b) Izračunajte integral

$$\int_G \frac{x}{\sqrt{y}} \, dx \, dy \, .$$

4. (20) Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo dana parametrično s

$$\vec{r}(u,v) = (-\cos u + \sqrt{3}\sin u + \sqrt{2}\,v, -\cos u - \sqrt{3}\sin u + \sqrt{2}\,v, 2\cos u + \sqrt{2}v)$$

za $0 \leq u \leq 2\pi$ in $0 \leq v \leq a$. Naj bo $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$. Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}$ skozi ploskev $\mathcal{S}$. Za normalo si izberite vektor $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$.

Namig: Pri izračunu integrala lahko upoštevate, da se členi oblike $\cos u$, $\sin u$ *ali* $\cos u \sin u$ *na* $[0,2\pi]$ *integrirajo v* 0.

5. (20) Naj bo $R > 0$ in naj bo telo G presek krogle podane z $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ in neskončnega stožca podanega z $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$. Torej

$$G = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}\,.$$

Z $\mathcal{S}$ označimo ploskev, ki obdaja telo G. Izračunajte pretok polja $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (3x, xyz, \sin(xy))$ skozi $\mathcal{S}$. Za normalo vzemite vektor, ki kaže iz telesa.

Namig: Gauss in krogelne koordinate.