

Izpit iz Matematike 3

Fakulteta za strojništvo

19. junij 2014

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Naj bo $a > 0$, $b > 0$ in

$$f(x, y) = x^2 y^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right).$$

Pokažite, da je točka

$$\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}} \right)$$

stacionarna točka funkcije f in jo klasificirajte.

2. (20) Dana je funkcija

$$f(x, y, z) = xz^3 + y \ln(y^2z + x^3z^2) + 5y - z.$$

Utemeljite, da obstaja taka okolica U točke $(0, 1)$ in taka funkcija $g : U \rightarrow \mathbb{R}$, da je $g(0, 1) = 1$ in $f(x, g(x, z), z) = 4$ za vse $(x, z) \in U$. Izračunajte še $g_x(0, 1)$, $g_z(0, 1)$ in $g_{zz}(0, 1)$.

3. (20) Izračunajte integral

$$\int_D y^2 \sin(xy) \, dx dy,$$

kjer je D trikotnik z oglišči $(0, 0)$, $(\pi/2, 0)$, $(\pi/2, 1)$.

4. (20) Naj bo $R > 0$. Z G označimo zgornji del krogle, s središčem v izhodišču koordinatnega sistema in polmerom R , ki ga odreže ravnina $x + z = R$. Natančneje,

$$G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq R - x\}.$$

Izračunajte integral

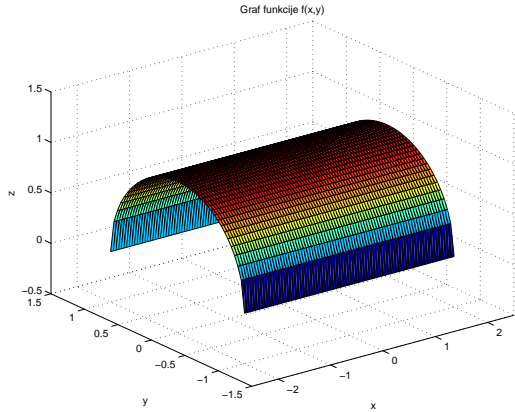
$$\int_G \frac{x + z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx dy dz.$$

Namig: krogelne ali cilindrične koordinate.

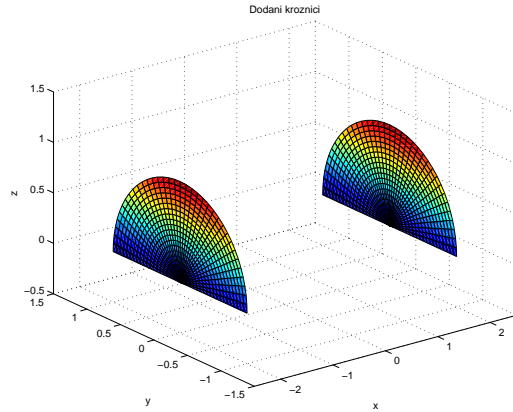
5. (20) Vektorsko polje naj bo dano z $\vec{F}(x, y, z) = (3x, 2y, 0)$. Ploskev \mathcal{S} naj bo graf funkcije

$$f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$$

na pravokotniku $-2 \leq x \leq 2$ in $-1 \leq y \leq 1$. Za normale na ploskev \mathcal{S} izberemo vektorje s pozitivno z -komponento.



Slika 3a Izgled ploskve \mathcal{S} .



Slika 3b Dodana polkroga.

- Izračunajte pretok skozi vsakega od polovice krogov, ki ležita v ravninah $x = -2$ in $x = 2$, imata središči v $(-2, 0, 0)$ in $(2, 0, 0)$, polmera $R = 1$ in ležita nad xy -ravnino. Polkroga sta prikazana na sliki 3b. Normala na prvi polkrog naj bo $(-1, 0, 0)$, normala na drugi pa $(1, 0, 0)$.

- S pomočjo Gaussovega izreka izračunajte pretok \vec{F} skozi ploskev \mathcal{S} .