Izpit iz Matematike 3

Fakulteta za strojništvo

19. junij 2015

Ime in priimek:______________________ Vpisna številka:________________

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	**Točke**
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Dana je funkcija

$$f(x, y, z) = x^2 y + z e^{xz^2} + y^3 z^2 - 12y.$$

Utemeljite, da obstaja taka okolica U točke $(0, 1)$ in taka funkcija $g : U \to \mathbb{R}$, da je $g(0, 1) = 2$ in $f(x, y, g(x, y)) = -6$ za vse $(x, y) \in U$. Izračunajte še $g_x(0, 1)$, $g_y(0, 1)$ in $g_{yy}(0, 1)$.

2. (a) (12) Zapišite splošno rešitev parcialne diferencialne enačbe

$$f_x^2(x,y)f_{xx}(x,y) = 1.$$

Namig: $g(x,y) = f_x(x,y)$.

(b) (8) Pokažite, da vsaka trikrat parcialno odvedljiva rešitev zgornje enačbe zadošča

$$2f_{xy}(x,y)f_{xx}(x,y) = -f_x(x,y)f_{xxy}(x,y)$$

za vse (x,y), v katerih je $f_x(x,y) \neq 0$.

3. (20) Izračunajte integral

$$\int_D \sqrt{2x+y}\,dxdy$$

kjer je D trikotnik omejen s premicami $y = x$, $y = \sqrt{3} \cdot x$ in $y = 1$.

4. (20) Iz valja, z višino $h > 0$ in z osnovno ploskvijo s polmerom 3 in središčem $S_1(3,0)$, izvrtamo valj, z osnovno ploskvijo s polmerom 1 in središčem $S_2(1,0)$. Dobljeno telo označimo z G. Natančneje,

$$G = \{(x, y, z) \colon (x-1)^2 + y^2 \geq 1, (x-3)^2 + y^2 \leq 9, z \in [0, h]\}.$$

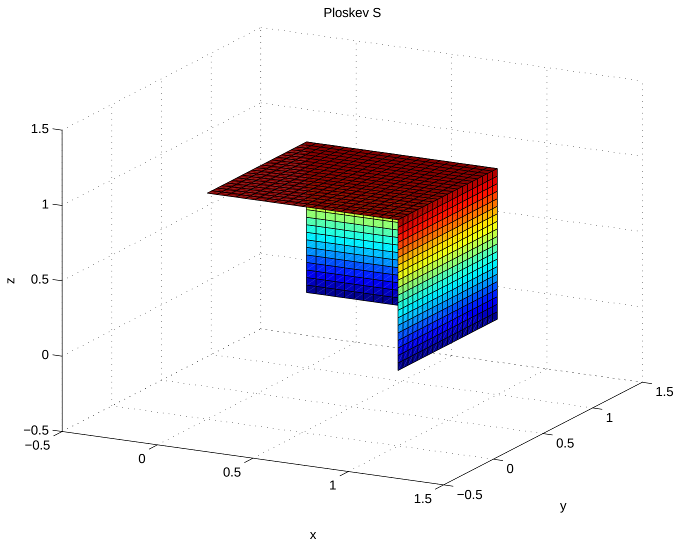
Izračunajte integral

$$\int_G (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz.$$

Pomoč:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4} \qquad \text{in} \qquad \int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{3\pi}{16}.$$

5. (20) Vektorsko polje naj bo dano z $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (ax, by, cz)$, kjer so $a, b, c \in \mathbb{R}$.



Slika 1: Izgled ploskve $\mathcal{S}$.

(a) (10) Naj bo $Q = [0, 1]^3$ kocka. Naj bo ploskev $\mathcal{S}$ tisti del površine kocke, ki ne leži v nobeni od koordinatnih ravnin kot na sliki 1. Za normale izberite vektorje, ki kažejo iz kocke. Izračunajte pretok vektorskega polja $\overrightarrow{F}$ skozi to površino.

(b) (10) Izračunajte pretok vektorskega polja $\overrightarrow{F}$ skozi vsako lice kocke posebej. Za normale vedno izberemo vektorje, ki kažejo iz kocke.