

Izpit iz Matematike 3

Fakulteta za strojništvo

20. junij 2016

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Določite takšno število a , da bo točka $(2, 1, -2)$ možen vezani ekstrem funkcije $f(x, y, z) = x^2y + axz^2$ pri pogoju $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Pri tako določenem številu a izračunajte še ostale možne ekstreme z neničelnimi koordinatami ($x \neq 0$, $y \neq 0$ in $z \neq 0$).

2. (a)(10) Dvakrat parcialno odvedljiva funkcija $f(x, y)$ naj zadošča enačbi

$$(f(x, y))^2 + 4x^2 f(x, y) = 4y.$$

Pokažite, da velja

$$f_x(x, y) = -\frac{4xf(x, y)}{f(x, y) + 2x^2} \quad \text{in} \quad f_y(x, y) = \frac{2}{f(x, y) + 2x^2}.$$

Namig: Enakost, ki ji zadošča funkcija $f(x, y)$, odvajajte parcialno po x oziroma y .

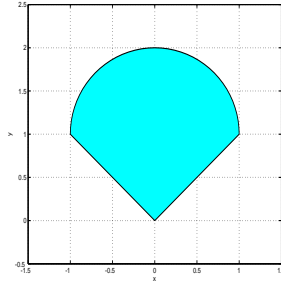
(b)(10) Izračunajte

$$f_{xy}(x, y) - 4x^3 f_{yy}(x, y).$$

3. (20) Naj bo telo G presek krogle s polmerom $R > 0$ in središčem v točki $(0, 0, R)$ in stožca z vrhom v izhodišču in osjo enako osi z , s katero plašč stožca oklepa kot $\pi/4$. V matematičnih oznakah je

$$G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2, x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0\}.$$

Prerez telesa z xz -ravnino je na sliki 1.



Slika 1 Prerez telesa G z xz -ravnino.

Izračunajte

$$\int_G \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx dy dz.$$

Pomoč: $\cos^4 \varphi = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2\varphi) + \frac{1}{8} \cos(4\varphi)$

4. (20) Ploskev \mathcal{S} naj bo dana parametrično s

$$\vec{r}(u, v) = (-\cos u + \sqrt{3} \sin u + \sqrt{2} v, -\cos u - \sqrt{3} \sin u + \sqrt{2} v, 2 \cos u + \sqrt{2} v)$$

za $0 \leq u \leq 2\pi$ in $0 \leq v \leq a$. Naj bo $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Izračunajte pretok vektorskega polja \vec{F} skozi ploskev \mathcal{S} . Za normalo si izberite vektor $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$.

Namig: Pri izračunu integrala lahko upoštevate, da se členi oblike $\cos u$, $\sin u$ ali $\cos u \sin u$ na $[0, 2\pi]$ integrirajo v 0.

5. (20) Naj bo G stožec z višino $h > 0$ in osnovno ploskvijo, ki leži v xy -ravnini in ima središče $S(0, 0, 0)$ ter polmer $R > 0$. Natančneje,

$$G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Z \mathcal{S} označimo plašč stožca G (brez osnovne ploskve). Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}(x, y, z) = (xy, x^2, z^2 + x)$ skozi \mathcal{S} . Za normalo vzemite vektor, ki kaže iz telesa.