Fakulteta za strojništvo **Izpit iz Matematike 3** 21. februar 2020

Čas pisanja je 100 minut. Dovoljen je A4 list s formulami. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. **Naloge naj bodo na polah vidno označene.** Vsi odgovori morajo biti dobro utemeljeni.

Naloga 1 (20 točk). Za $a \neq 0$ naj bo dana funkcija $f(x,y) = ax^3y + 2xy^2$.

a) (8 točk) Izračunajte vse stacionarne točke funkcije f (klasifikacija ni potrebna).

b) (12 točk) Poiščite vse vezane ekstreme funkcije f pri pogoju $x^2 = y^2$.

Naloga 2 (20 točk).

a) (10 točk) Dana je dvakrat zvezno parcialno odvedljiva funkcija $(s,t,v) \mapsto f(s,t,v)$. Definiramo funkcijo

$$h(x,y) = f(x-y, x+y, x^2-y^2)$$

in označimo $s(x,y) = x-y$, $t(x,y) = x+y$ in $v(x,y) = x^2-y^2$. Izrazite

$$h_x(x,y) + h_y(x,y) \ \text{ in } \ h_{xx}(x,y) + h_{yx}(x,y)$$

s parcialnimi odvodi funkcije f in s $s(x,y)$, $t(x,y)$ in $v(x,y)$.

b) (10 točk) Zapišite splošno rešitev parcialne diferencialne enačbe

$$F_{yx}(x,y) + xF_y(x,y) = 0.$$

Naloga 3 (20 točk). Izračunajte integral

$$\int_D y^2 \sin(xy)\, dxdy,$$

kjer je D trikotnik z oglišči $(0,0)$, $(\frac{\pi}{4},0)$, $(\frac{\pi}{4},2)$.

Naloga 4 (20 točk). Naj bo $\mathcal{K}$ del krožnice:

$$\mathcal{K} = \{(x,y) : x^2+y^2 = 9, \ \ x \leq 0, \ \ y \leq 0\}$$

in naj bo $\vec{F}(x,y) = (x+2y, x-y^2)$. Izračunajte krivuljni integral vektorskega polja $\vec{F}$ po krivulji $\mathcal{K}$ od točke $(-3,0)$ do $(0,-3)$.

Naloga 5 (20 točk). Naj bo G stožec z višino $h > 0$ in osnovno ploskvijo, ki leži v $xy-$ravnini in ima središče $S(0,0,0)$ ter polmer $R > 0$. Natančneje,

$$G = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}\}\,.$$

Z $\mathcal{S}$ označimo plašč stožca G (brez osnovne ploskve). Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}(x,y,z) = (x, x^2, z^2)$ skozi $\mathcal{S}$. Za normalo v vsaki točki ploskve vzemite vektor $\mathcal{S}$, ki kaže iz telesa.

Veliko uspeha pri reševanju!