

Izpit iz Matematike 3

Fakulteta za strojništvo

22. februar 2019

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, zaporedoma so vredne po 20, 15, 25, 20 in 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (a) (10) Dvakrat zvezno parcialno odvedljivi funkciji $(u, v) \mapsto f(u, v)$ pravimo, da je *homogena stopnje* n , če zadošča enakosti

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

za vsak t in $n \in \mathbb{N}$. Pokažite, da za takšno funkcijo f velja

$$xf_u(x, y) + yf_v(x, y) = nf(x, y).$$

Namig: Najprej odvajajte po primerni spremenljivki, nato pa izberite primerno vrednost spremenljivke t .

(b) (10) Zapišite splošno rešitev parcialne diferencialne enačbe

$$f_{zzxy}(x, y, z) + 2f_{zxy}(x, y, z) - 3f_{xy}(x, y, z) = 0.$$

Namig: $g(x, y, z) = f_{xy}(x, y, z)$.

2. (15) Izračunajte največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ na območju $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Namig: Običajne stacionarne točke in vezani estremi.

3. (25) Območje kroga s središčem v $(2, 0)$ in polmerom 3 presekamo s prvim kvadrantom in rezultat označimo z D . Natančneje,

$$D = \{(x, y) : (x - 2)^2 + y^2 \leq 9, \ x \geq 0, \ y \geq 0\}.$$

Izračunajte integral

$$\int_D \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx dy.$$

Namig: Pri fiksni φ izračunajte pozitivno rešitev kvadratne enačbe $r^2 - 4r \cos \varphi - 5 = 0$.

4. (a) (10) Ploskev \mathcal{S} naj bo presek valja $x^2 + y^2 \leq 4$, ravnine $x + 2y - z = 3$ in polprostora $y \geq 0$. Natančneje,

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4, x + 2y - z = 3, y \geq 0\}.$$

Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, 2z)$ skozi \mathcal{S} . Za normalo izberite vektor z negativno z koordinato.

(b) (10) Izračunaj krivuljni integral $\int_{\mathcal{K}} \vec{F} d\vec{r}$, kjer je $\vec{F}(x, y, z) = (yz + 1, xz, xy)$ in je \mathcal{K} daljica od točke $A(1, 2, 2)$ do točke $B(0, 3, -4)$.

5. (20) Ploskev (polsfera) \mathcal{S} naj bo presek sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ in zgornjega polprostora $z \geq 0$. Natančneje,

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\}.$$

Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y, z)$ skozi ploskev \mathcal{S} (normala v vsaki točki ploskve \mathcal{S} naj ima pozitivno z koordinato).

Namig: Gauss.