Izpit iz Matematike 3

Fakulteta za strojništvo

24. april 2014

Ime in priimek:______________________ Vpisna številka:________________

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	**Točke**
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Kvader vrišemo v elipsoid, tako da so robovi vzporedni koordinatnim osem. Enačba elipsoida je dana z

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,,$$

kjer so a, b, c pozitivna števila. Poiščite dolžine robov, za katere ima vrisani kvader največjo možno prostornino.

Namig: Za oglišče (x, y, z) *(vrisanega kvadra) s pozitivnimi koordinatami, je pripadajoči volumen kvadra enak* $8xyz$*.*

2. (20) Dana je funkcija

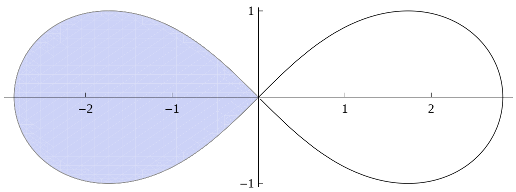
$$f(x, y, z) = x^2 y + z e^{xz^2} + y^3 z^2 - 12y.$$

Utemeljite, da obstaja taka okolica U točke $(0, 1)$ in taka funkcija $g : U \to \mathbb{R}$, da je $g(0, 1) = 2$ in $f(x, y, g(x, y)) = -6$ za vse $(x, y) \in U$. Izračunajte še $g_x(0, 1)$, $g_y(0, 1)$ in $g_{yx}(0, 1)$.

3. (20) Lemniskata je dana z enačbo

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

za $a > 0$. Krivulja je na spodnji sliki.



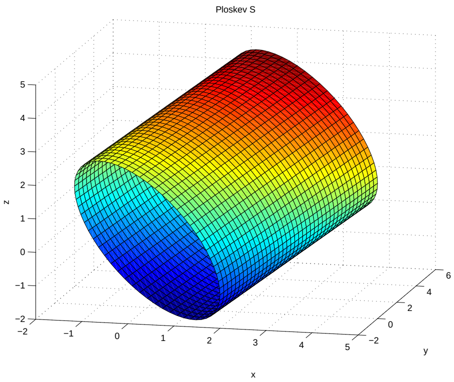
Naj bo G osenčeno območje na zgornji sliki. S pomočjo polarnih koordinat izračunajte

$$\int_G \frac{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}{\sqrt{2a^2 - x^2 - y^2}}\,.$$

4. (20) Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo dana parametrično s

$$\Phi(u,v) = (-\cos u + \sqrt{3}\sin u + \sqrt{2}\,v, -\cos u - \sqrt{3}\sin u + \sqrt{2}\,v, 2\cos u + \sqrt{2}v)$$

za $0 \leq u \leq 2\pi$ in $0 \leq v \leq a$. Ploskev je na spodnji sliki.



Naj bo $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$. Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}$ skozi ploskev $\mathcal{S}$. Za normalo si izberite vektor $\Phi_u \times \Phi_v$.

Namig: Pri izračunu integrala

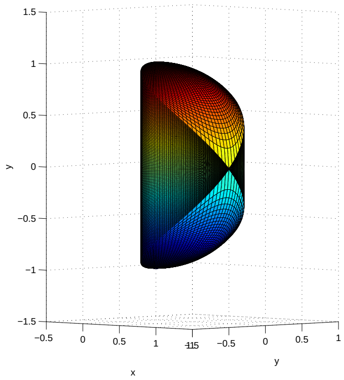
$$\int_0^{2\pi} \vec{F} \cdot (\Phi_u \times \Phi_v)\, \mathrm{d}u\,,$$

upoštevajte, da se členi oblike $\cos u$, $\sin u$ *ali* $\cos u \sin u$ *na* $[0, 2\pi]$ *integrirajo v* 0.

5. (20) Naj bo G telo, ki nastane kot presek krogle s polmerom $R = 1$ in središčem v izhodišču in neskončnega valja z osjo vzporedno z-osi, ki gre skozi točko $(1/2, 0)$ in ima polmer $R = 1/2$. V matematičnih oznakah je telo

$$G = \{(x, y, z) \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}.$$

Telo je na spodnji sliki



S pomočjo cilindričnih koordinat izračunajte, da je prostornina telesa G enaka

$$V = \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}.$$

Naj bo $\vec{F}(x, y, z) = (-2yz, (2x-1)z, z)$. S pomočjo Gaussovega izreka izračunajte pretok vektorskega polja F skozi tisti del površine telesa G, ki sovpada z površino krogle. Za normalo vedno izberite vektor, ki kaže iz telesa. Ploskev je na spodnji sliki