

Izpit iz Matematike 3

Fakulteta za strojništvo

28. avgust 2015

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (a) (16) Poiščite takšno realno število a , da bo $(0, 1)$ stacionarna točka funkcije dveh spremenljivk

$$f(x, y) = x^2y - 2x^2 + ay^3 + 3y.$$

V tem primeru poiščite vse stacionarne točke in jih klasificirajte.

- (b) (4) Zapišite Taylorjev polinom $T(x, y)$ druge stopnje funkcije $f(x, y)$ razvit okrog točke $(3, 2)$ (pri konkretno izračunanem številu a iz prvega dela naloge).

2. (a) (12) Zapišite splošno rešitev parcialne diferencialne enačbe

$$f_{xx}(x, y) + \frac{2}{x}f_x(x, y) = 0.$$

Namig: $g(x, y) = f_x(x, y)$.

(b) (8) Naj bo $h(x, y) = \Phi(1 + \frac{x}{y})$, kjer je Φ odvedljiva funkcija ene spremenljivke. Izračunajte

$$xh_x(x, y) + yh_y(x, y).$$

3. (20) Naj bo K zgornja polovica krogle s središčem v izhodišču in polmerom R , torej

$$K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}.$$

(a) (10) Izračunajte integral

$$\int_K z \, dx \, dy \, dz.$$

(b) (10) Naj ima opisano telo konstantno masno gostoto $\rho = 1$. Izračunajte masni vztrajnostni moment K okrog osi x , torej integral

$$\int_K (y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz.$$

Pomoč: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ in $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$.

4. (20) Ploskev \mathcal{S} naj bo dana parametrično z

$$\vec{r}(u, v) = \left(\sqrt{1 - v^2} \cos u, \sqrt{1 - v^2} \sin u, v \right)$$

za $0 \leq u \leq 2\pi$ in $-1 \leq v \leq 1$.

(a) (10) Izračunajte enotski normalni vektor na ploskev v točki $(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$.

(b) (10) Naj bo $\vec{F}(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$. Izračunajte pretok polja \vec{F} skozi ploskev \mathcal{S} .

5. (20) Naj bo vektorsko polje dano z $\vec{F}(x, y, z) = (z - y, x - z, y - x)$.

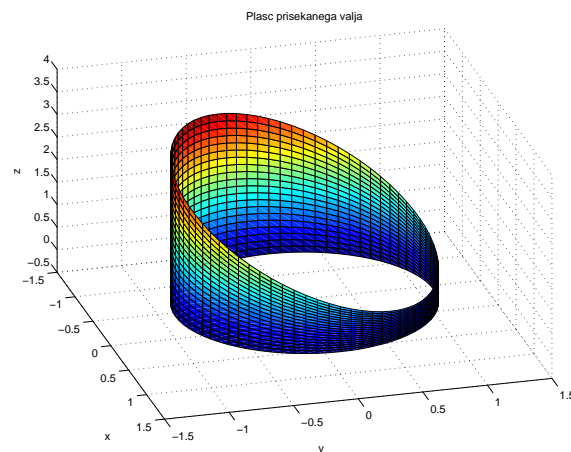
a. (10) Izračunajte pretok vektorskega polja skozi plašč valja (v smeri zunanjih normal), danega z

$$G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq h\}.$$

b. (10) Izračunajte pretok vektorskega polja \vec{F} skozi plašč prisekanega valja (v smeri zunanjih normal) danega z

$$G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2 - x - y\}.$$

Plašč prisekanega valja je na sliki 1. Upoštevajte, da je enotska normala na ravnino, s katero smo prisekali valj, enaka $\vec{n} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$.



Slika 1 Plašč prisekanega valja.