

Izpit iz Matematike 3

Fakulteta za strojništvo

29. avgust 2016

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (a) (20) Za dane pozitivne konstante a, b, c, d naj bo funkcija $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definirana z

$$F(x, y) = c \ln x - d \cdot x + a \ln y - b \cdot y.$$

Za točko $(x_0, y_0) = (x_0, a/b)$ naj velja $F(x_0, y_0) = \alpha$ in $x_0 > c/d$. Pokažite, da v okolici točke y_0 obstaja funkcija $g(y)$, da velja $g(y_0) = x_0$ in $F(g(y), y) = \alpha$. Pokažite, da ima g v točki y_0 lokalni maksimum.

2. (a) (11) Zapišite splošno (trikrat zvezno parcialno odvedljivo) rešitev parcialne diferencialne enačbe

$$f_{xyy}(x, y) - 4f_{xy}(x, y) - 5f_x(x, y) = 0.$$

Namig: $g(x, y) = f_x(x, y)$.

(b) (9) Naj bo $(u, v) \mapsto f(u, v)$ zvezno parcialno odvedljiva funkcija, ki zadošča $f_u(u, v) = f_v(u, v)$ za vse $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Naj bo $x \mapsto s(x)$ zvezno odvedljiva in $(x, y) \mapsto t(x, y)$ zvezno parcialno odvedljiva funkcija. Definirajmo $F(x) = f(s(x), t(x, y))$. Izračunajte $F_x(x, y)$ za tiste (x, y) , za katere velja $t_x(x, y) = s'(x)$.

3. (20) Izračunajte integral

$$\int_D x^2 \sin(xy) \, dx dy,$$

kjer je D trikotnik z oglišči $(0, 0)$, $(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \sqrt{\pi})$, $(0, \sqrt{\pi})$.

4. (20) Ploskev \mathcal{S} je podana s parametrizacijo

$$\vec{r}(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v, u)$$

za $u \in [0, 1]$ in $v \in [0, \pi/2]$. Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}(x, y, z) = (-y, -x, z)$ skozi ploskev \mathcal{S} (v vsaki točki ploskve izberemo normalo s pozitivno z koordinato).

5. (20) Naj bo G spodnja (južna) polkrogla s središčem $S(0,0,0)$ in polmerom $R > 0$. Natančneje,

$$G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \leq 0\}.$$

Ploskev \mathcal{S} naj bo spodnja (južna) plosfera, ki obdaja G (brez osnovne ploskve, ki leži v ravnini xy). Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, yz, x^2 + y^2)$ skozi \mathcal{S} . Za normalo vzemite vektor, ki kaže iz telesa.