Izpit iz Matematike 3

Fakulteta za strojništvo

30. junij 2017

Ime in priimek:______________________ Vpisna številka:________________

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	**Točke**
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Dana je funkcija

$$f(x,y,z) = 2yz^2 + x^2 e^{xy} + xy^2.$$

Utemeljite, da obstaja taka okolica U točke $(0,1)$ in taka funkcija $g : U \to \mathbb{R}$, da je $g(0,1) = -1$ in $f(g(y,z),y,z) = 1$ za vse $(y,z) \in U$. Izračunajte še $g_z(0,1)$, $g_y(0,1)$ in $g_{zy}(0,1)$.

2. **(a)** (12) Zapišite splošno rešitev parcialne diferencialne enačbe

$$f_{yyxz}(x,y,z) + 4f_{yxz}(x,y,z) + 3f_{xz}(x,y,z) = 0.$$

Namig: $g(x,y,z) = f_{xz}(x,y,z)$.

(b)(8) Naj bo $(u,v) \mapsto F(u,v)$ dvakrat zvezno parcialno odvedljiva funkcija in naj bosta $x \mapsto s(x)$ in $x \mapsto t(x)$ dvakrat zvezno odvedljivi funkciji. Definirajmo

$$G(x) = F(s(x), t(x)).$$

Izrazite $G''(x)$ z odvodi funkcij s in t in parcialnimi odvodi funkcije F.

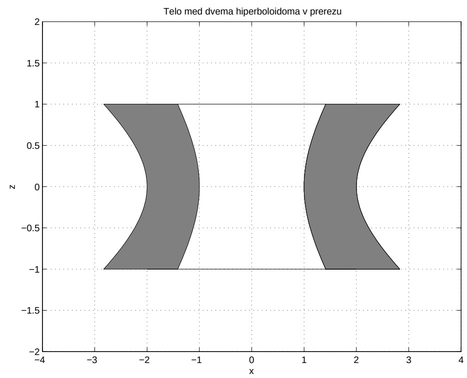
3. (25) Naj bo $R > 0$. Naj bo G del krogle $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, ki leži v tretjem oktantu. Natančneje,

$$G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \;\; z \geq 0, \;\; x \leq 0, \;\; y \leq 0\}.$$

Izračunajte

$$\int_G (x^2 + y^2) z \, dxdydz.$$

4. Naj velja $b > a > 0$. Naj bo G telo, ki ga omejujeta ravnini $z = -1$ in $z = 1$ in hiperboloida $(x^2 + y^2)/a^2 - z^2 = 1$ in $(x^2 + y^2)/b^2 - z^2 = 1$. Profil telesa v prerezu je na sliki 1.



Slika 1 Telo med dvema hiperboloidoma v prerezu.

(10) Izračunajte prostornino telesa G.

(10) Izračunajte

$$\int_G (x + y + z)\, dx\, dy\, dz\,.$$

5. (20) Naj bo G stožec z višino $h > 0$ in osnovno ploskvijo, ki leži v ravnini xy in ima središče $S(0,0,0)$ ter polmer $R > 0$. Natančneje,

$$G = \{(x,y,z)\colon x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}\}\,.$$

Z $\mathcal{S}$ označimo plašč stožca G (brez osnovne ploskve). Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}(x,y,z) = (xz, x^2 + z^2, 4zy)$ skozi $\mathcal{S}$. Za normalo vzemite vektor, ki kaže iz telesa.