Teoretični del izpita iz Matematike 3

Fakulteta za strojništvo

27. junij 2014

Ime in priimek:______________________ Vpisna številka:________________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Vprašanj je 10, vsako je vredno 10 točk. Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Pri vsakem vprašanju je samo en pravilen odgovor, ki ga je potrebno nedvoumno obkrožiti. Na razpolago imate 30 minut.
Točkovanje:

- pravilno obkrožen odgovor: 10 točk
- neoznačen ali dvoumno označen odgovor: 0 točk
- nepravilno obkrožen odgovor: -5 točk

1. Naj bosta funkcija $(x,y) \mapsto f(x,y)$ na odprti množici G parcialno zvezno odvedljiva in naj bo $(x_0,y_0) \in G$. Potem obstajata tak k in tak $c \in [x_0, x_0+k]$, da je

a. $f(x_0+k,y_0) - f(x_0,y_0) = kf_{xx}(c,y_0)$.

b. $f(x_0+k,y_0) - f(x_0,y_0) = kf_{y}(c,y_0)$.

c. $f(x_0+k,y_0) - f(x_0,y_0) = kf_{yy}(c,y_0)$.

d. $f(x_0+k,y_0) - f(x_0,y_0) = kf_{x}(c,y_0)$.

2. Za funkcijo

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

velja

a. $u_{xx} = u_x$.

b. $u_{xx} = u_y$.

c. $u_{xx} = u_{yy}$.

d. $u_{xx} = u_{yx}$.

3. Naj bo $(x,y) \mapsto f(x,y)$ zvezno parcialno odvedljiva na odprti množici G in naj bo $(x_0,y_0) \in G$. Če je $f(x_0,y_0) = 0$ in

a. $f_x(x_0,y_0) \neq 0$, potem za nek $\eta > 0$ obstaja funkcija g na intervalu $(y_0-\eta, y_0+\eta)$, da je $f(g(y),y) = 0$ za $y \in (y_0-\eta, y_0+\eta)$.

b. $f_y(x_0,y_0) \neq 0$, potem za nek $\eta > 0$ obstaja funkcija g na intervalu $(y_0-\eta, y_0+\eta)$, da je $f(g(y),y) = 0$ za $y \in (y_0-\eta, y_0+\eta)$.

c. $f_x(x_0,y_0) = 0$, potem za nek $\eta > 0$ obstaja funkcija g na intervalu $(y_0-\eta, y_0+\eta)$, da je $f(g(y),y) = 0$ za $y \in (y_0-\eta, y_0+\eta)$.

d. $f_y(x_0,y_0) = 0$, potem za nek $\eta > 0$ obstaja funkcija g na intervalu $(y_0-\eta, y_0+\eta)$, da je $f(g(y),y) = 0$ za $y \in (y_0-\eta, y_0+\eta)$.

4. Naj bo $f(x,y)$ dvakrat zvezno parcialno odvedljiva. Če velja $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$, $f_{yy}(x_0,y_0) > 0$ in $f_{xy}(x_0,y_0) = 0$ za neko stacionarno točko (x_0,y_0) funkcije f, potem je točka (x_0,y_0)

a. lokalni minimum.

b. lokalni maksimum.

c. sedlo.

d. lahko katerakoli od zgoraj naštetih treh možnosti.

5. Naj bo $b > a > 0$ in naj bo G lupina valja podana z

$$G = \{(x, y, z) : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, 0 \leq z \leq b\}\,.$$

Potem je

a. $\int_G \sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz = 2\pi \int_0^b dz \int_a^b r\sqrt[3]{r^2 + z^2}\, dr.$

b. $\int_G \sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz = 2\pi \int_0^b dz \int_a^b \sqrt[3]{r^2 + z^2}\, dr.$

c. $\int_G \sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz = \pi \int_0^b dz \int_a^b \sqrt[3]{r^2 + z^2}\, dr.$

d. $\int_G \sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz = \pi \int_0^b dz \int_a^b r\sqrt[3]{r^2 + z^2}\, dr.$

6. Naj bo $R > 0$. Z G označimo zgornjo polkroglo, s središčem v izhodišču koordinatnega sistema in polmerom R. Natančneje,

$$G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}.$$

Če je f zvezna funkcija definirana na G, potem je preko uvedbe krogelnih koordinat integral $\int_G f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ enak

a. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int_0^R f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta) r^2\, dr.$

b. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^R f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\, dr.$

c. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^R f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\, dr.$

d. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^R f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta) r^2\, dr.$

7. Naj bo ploskev $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ dana z gladko parametrizacijo $\vec{r}\colon D \to \mathcal{S}$, $(u, v) \mapsto \vec{r}(u, v)$ za $D \subset \mathbb{R}^2$. Potem je površina ploskve $\mathcal{S}$ enaka

a. ploščini območja D.

b. $\int_D (E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v))^2\, dudv$, kjer so $E(u, v)$, $G(u, v)$ in $F(u, v)$ koeficienti prve fundamentalne forme ploskve $\mathcal{S}$.

c. $\int_D \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)}\, dudv$, kjer so $E(u, v)$, $G(u, v)$ in $F(u, v)$ koeficienti prve fundamentalne forme ploskve $\mathcal{S}$.

d. $\int_D (E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v))\, dudv$, kjer so $E(u, v)$, $G(u, v)$ in $F(u, v)$ koeficienti prve fundamentalne forme ploskve $\mathcal{S}$.

8. Naj bo $\vec{F}(x,y,z) = (x,z,z)$ vektorsko polje in naj bo ploskev $\mathcal{S}$ površina valja $G = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 3, 0 \leq z \leq 2\}$ (vključno z osnovnima ploskvama). Za normalo si izberemo vektor, ki kaže navzven. Velja

a. $\int_{\mathcal{S}} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{\mathcal{S}} = 4\pi$.

b. $\int_{\mathcal{S}} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{\mathcal{S}} = 8\pi$.

c. $\int_{\mathcal{S}} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{\mathcal{S}} = 0$.

d. $\int_{\mathcal{S}} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{\mathcal{S}} = 12\pi$.

9. Naj bo $\mathcal{K}$ odsekoma gladka enostavna krivulja, ki ograjuje območje D v ravnini $z = 0$ in je orientirana tako, da je pri integraciji po $\mathcal{K}$ območje D na levi strani. Za parcialno zvezno odvedljivo polje $\vec{F}(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ je krivuljni integral

a. $\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_D (g_x(x,y) - f_x(x,y))\, dxdy$,

b. $\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_D (g(x,y) - f(x,y))\, dxdy$.

c. $\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_D (g_x(x,y) - f_y(x,y))\, dxdy$,

d. $\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_D (g_y(x,y) - f_y(x,y))\, dxdy$,

10. Naj bo $\mathcal{K}$ gladka enostavna krivulja med točkama $A(0,1,1)$ in $B(2,1,3)$ in naj bo dano vektorsko polje $\vec{F}(x,y,z) = (1, 4y^3 z, y^4)$. Potem je krivuljni integral

a. $\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = 4$,

b. $\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = 7$.

c. $\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = -1$,

d. $\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = 1$,