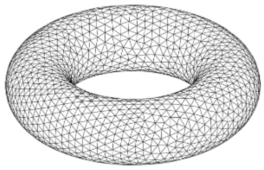
Teme za magistrske naloge (in z razširitvijo tudi doktorske disertacije)

Mentor: doc. dr. Boštjan Gabrovšek (bostan.gabrovsek@fs.uni-lj.si)

Tema: Homologija ploskev in teles

Homologija je matematični koncept, ki v dani ploskvi ali telesu prešteje različne vrste »lukenj«. Klasificirali bomo n-dimenzionalne »luknje« in si ogledali algebraičen (računski) način za določevanje števila lukenj ploskve ali telesa iz dane triangulacije, ki ga dobimo npr. iz CAD sistema, kjer za izračun niti ne potrebujemo 3D koordinat točk, ampak zgolj podatek o sosednosti trikotnikov.



Zgled: iz triangulacije zgornjega votlega torusa lahko izračunamo, da ima dve 1-dimenzionalni luknji (meridiana in logituda) ter eno 2-dimenzionalno luknjo (prazna notranjost).

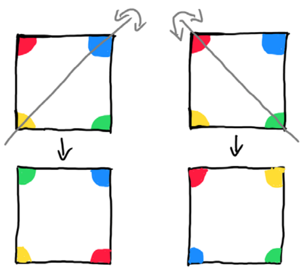
Aplikacije: računanje topoloških lastnosti oz. število lukenj telesa iz oblaka točk (LiDAR), odkrivanje lukenj v brezžičnih omrežjih, odkrivanju tumorjev iz MR, merjenje poroznoszi kosti pri Alzheimerjevi bolezni, računanje nedostopnih točk robotske roke, …

Literatura:

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Homology_(mathematics).
2. A. Zomorodian, Homology, 2022.
3. Ž. Virk, Introduction to Persistent Homology, UL FRI, Ljubljana, 2022.

Tema: Simetrija mehanskih struktur

Matematično bomo definirali simetrijo kot grupo, ki deluje izometrično na neko množico. Raziskali bomo enostavne simetrije in poiskali primere v mehanskih strukturah. Alternativno, raziščemo lahko kristalografske grupe, ki določajo pravilne ponavljajoče se 3D strukture, ki zapolnijo prostor.



Literatura:

1. Q. Qiu, et al., Classification and Effects of Symmetry of Mechanical Structure and Its Application in Design, Symmetry 13(4), 2021.
2. Department of Chemistry & Biochemistry, CCLS, Symmetry in Crystallography, 2019.
3. https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry_group
4. G. Martin, Transformation Geometry, An Introduction to Symmetry, Springer, New York, 1982.
5. B. Gabrovšek, M. Cencelj, Matematika v umetnosti, poglavje 5, UL PEF, 2022 (po emailu).

Tema: Tensegrity strukture

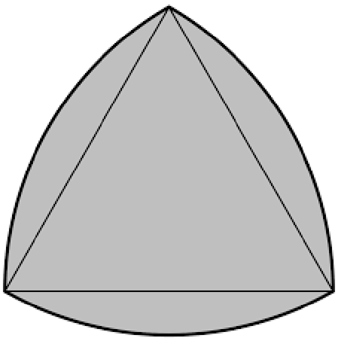
Matematično bomo opisali »Tensegrity« strukture in dokazali nekaj preprostih geometrijskih izrekov, ki opisujejo takšne konstrukcije. S kombinatoričnimi prijemi bomo poiskali nekaj najpreprostejših primerov (v ravnini in/ali 3D prostoru).

Literatura:

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Tensegrity
2. T. Jordan, et al., Rigid tensegrity labelings of graphs, European J. Combin. 30, 2009.
3. A. B. Harish, et al., Mathematics of Stable Tensegrity Structures, arXiv, 2022.
4. R. Connelly, A. Beck, Mathematics and Tensegrity, American Scientist 86(2), 1998.

Tema: Reuleauxovi liki

Reuleauxov trikotnik je ukrivljen trikotnik, ki ima konstantno širino. Je najpreprostejši takšen lik, poleg kroga. Analizirali bomo geometrijske in metrične lastnosti tega lika. Problem bomo posplošili na več točk in tudi na 3-dimenzije. Raziskali bomo tudi potencialne aplikacije.

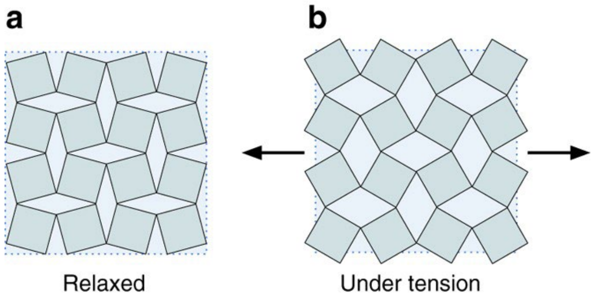


Literatura:

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Reuleaux_triangle
2. V. Thakur, What is the Reuleaux triangle?, 2022.
3. G. Conti & R. Paoletti, Reuleaux Triangle in Architecture and Applications, Faces of Geometry. From Agnesi to Mirzakhani, Lecture Notes in Networks and Systems 88, 2019.
4. X. Hu, N. Li, B. Liu, Simulation and Application of Reuleaux Triangle In Geometric Measurement, IOP Conference Series Earth and Environmental Science 310(2), 2019.

Tema: Avksetične struktura (angl. auxetics)

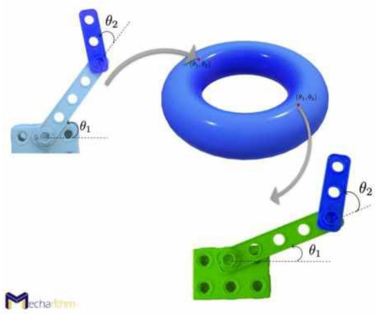
Struktura je avksetična, če postane debelejša (v smeri, ki je pravokotna na silo), ko jo raztegnemo. Takšna struktura sodi v skupino mehaničnih metamaterialov (tj. lastnost določa notranja struktura in ne material). Ogledali si bomo geometrijsko teorijo, ki stoji za avksetičnimi strukturami in analizirali nekaj primerov takšnih stuktur.



Literatura:

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Auxetics
2. C. Borcea & I. Streinu, New principles for auxetic periodic design, SIAM J Appl Algebr Geom. 1, 2017.
3. C. Borcea & I. Streinu, Geometric auxetics, Proc. Royal Soc. A Mathematical Physical and Engineering Sciences 471(2184), 2022.

Tema: Konfiguracijski prostori in topološka kompleknost



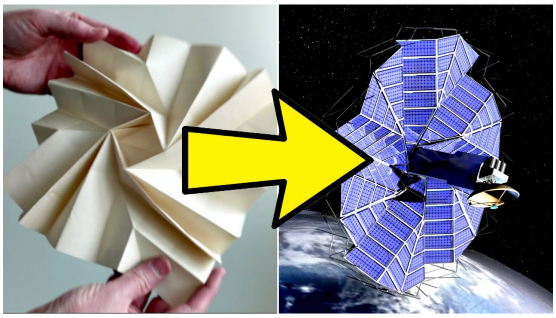
Definirali bomo konfiguracijski prostor delca/robota/robotske roke in definirali produkte konfiguracijskih prostorov, s katerim interpretiramo zaporedno nizanje mehanskih delov. Pogledali si bomo tudi pojem topološke kompleknosti, ki poda informacijo o tem, katere pozicije (robotske roke) so nemogoče.

Literatura:

1. M. Farber, Topological complexity of motion planning, arXiv, 2001.
2. M. Grant, Topology and robot motion planning, 2015.
3. https://en.wikipedia.org/wiki/Topological_complexity

Tema: Origami, kirigami in zlaganje sončnih celic satelitov

Pogledali bi matematično definicijo origamija in kirigamija ter dokazalni nekaj osnovnih lastnosti teh konstrukcij. Kot aplikacijo bi raziskali zlaganje sončnih celic satelitov v omejen cilinder in raziskali možne simetrije zlaganja.

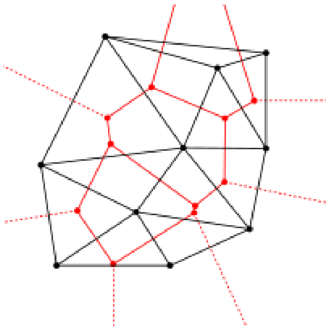


Literatura:

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics_of_paper_folding
2. Q. Han, et al., Geodesics and isometric immersions in kirigami, arXiv, 2021.
3. Solar Power, Origami-Style, NASA, 2017.

Tema: posplošene triangulacije ploskev in teles

Pogledali si bomo Delonovo triangulacijo (triangulacija ploskev in teles iz oblaka točk) in Voronoiov diagram ploskev in teles ter uporabo. Pojma bomo tudi posplošili in raziskali nekaj lastnosti in uporab takšnih triangulacij (npr. analiza skalarnih in vektorskih polj na triangulaciji).

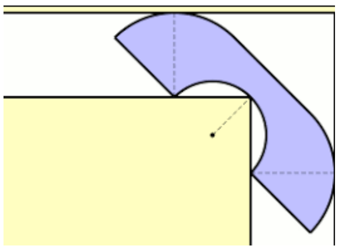


Literatura:

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Delaunay_triangulation
2. https://en.wikipedia.org/wiki/Triangulation_(topology)
3. K. Hormann & M. Reimers, Triangulating Point Clouds with Spherical Topology, Mathematics, 2002.

Tema: Problem premikanja kavča

Zanima nas dvodimenzionalen problem kako velik kavč lahko togo premaknemo po hodniku v obliki črke "L". Problem je leta 1966 zastavil matematik Leo Moser in je še vedno nerešen. Raziskali bomo razne posplošitve problema (nepravokoten vogal, 3D cevni vogal, …) in te primere poskali kakšno spodnjo mejo.

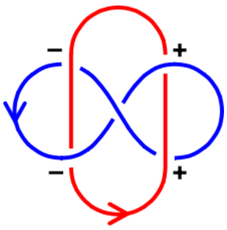


Literatura:

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Moving_sofa_problem
2. Dan Romik, The moving sofa problem, 2017.
3. N. R. Wagner, The Sofa Problem, The American Mathematical Monthly. 83:3, 1976.

Tema: Gaussov integral in spletno število vozla

Definirali bomo Gaussovo spletno število, ki ga dobimo kot dvojni krivuljni integral po dveh sklenjenih krožnicah po prostoru. Gaussovo spletno število je mogoče izračunati tudi kombinatorično na podlagi diagrama vozla/spleta. Raziskali bomo aplikacije v elektromagnetizmu in zvijanju DNK.



Literatura:

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Linking_number
2. R. L. Ricca & B. Nipoti, Gauss' linking number revisited, T. Knot Theory Ramif. 20:10, 2011.
3. R. L. Ricca & B. Nipoti, Derivation and interpretation of the Gauss linking number, Series on Knots and Everything, 2011.

Tema: Statistična mehanika in teorija vozlov

Leta 1989 je V.F.R. Jones odkril nenavadno povezave med dvema na videz nepovezanima teorijama: vozli in statistično mehaniko. Pokazali bomo kako particijska funkcija Pottsovega modela v statistični mehaniki generira Jonesov polinom, t.j. polinom, ki ga izračunamo neposredno iz diagrama vozla.

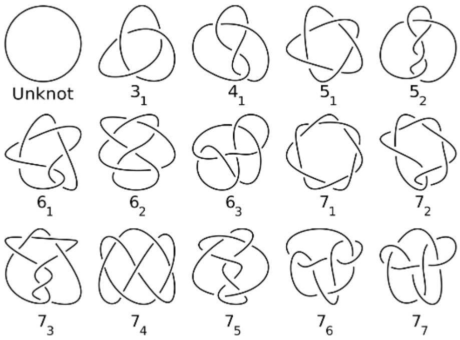


Tabela nekaj prvih matematičnih vozlov.

1. https://scienceworld.wolfram.com/physics/PottsModel.html
2. https://en.wikipedia.org/wiki/Jones_polynomial
3. L. Kauffman, Statistical Mechanics and the Jones polynomial, Contemporary Math. 78, 1988.